МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ФИЗИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

2

1966

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ ИЗ ЗАКОНОВ КЕПЛЕРА

Ю. К. Гулак

В программах вузовских курсов по общей физике, астрономии, иногда теоретической механике предлагается рассматривать вопрос о получении закона всемирного тяготения из законов Кеплера, установленных опытным путем. По установившейся традиции при точном решении этой задачи принято использовать теорему о дифференциале кинетической энергии, на основании которой получают формулу Бинэ, а за-тем и закон всемирного тяготения. Этот путь требует определенных знаний курса высшей математики и механики, а поэтому оказывается не всегда приемлемым. Чтобы избежать трудностей, приходится ограничиваться рассмотрением частного случая движения планет по круговым орбитам, снижая тем самым научный уровень изложения материала, предлагая слушателям принять отдельные весьма существенные положения без доказательства.

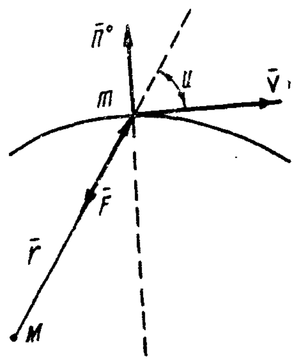

Рис. 1.

В настоящей статье изложен весьма простой способ вывода закона всемирного тяготения из законов Кеплера. Положительным в этом способе является то, что в нем:

а) рассматривается движение планет по эллиптическим орбитам, то есть сохраняется соответствующий научный уровень;

б) не используются приемы дифференциального исчисления;

в) можно легко сделать вывод, что под действием силы всемирного тяготения, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, возможно движение не только по эллиптическим орбитам, но и по всем таким, которые можно представить коническими сечениями.

Пусть положение планеты на орбите определяется относительно Солнца радиусом-вектором r. Движение ее происходит под действием центральной силы, приложенной к планете со стороны Солнца. Принимая Солнце за начало инерциальной системы координат, легко находим (рис. 1):

$$\frac{mv^2}{\rho} = F\sin(\widehat{rv}). \tag{1}$$

В соответствии с первым законом Кеплера планеты движутся по эллипсам. Радиус кривизны эллипса

$$\rho = \frac{p}{\sin^3 u}, \tag{2}$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ — параметр эллипса, определяемый через малую и большую полуоси; u — угол между касательной и радиусом-вектором точки касания, то есть $\angle u = (\widehat{rv})$.

Внося (2) в (1), получим: $F = \frac{mv^2\sin^2(\widehat{rv})}{p}$. Но $v\sin(\widehat{rv}) = v_t = \omega r$, где v_t — трансверсальная составляющая скорости, ω — угловая скорость планеты. Следовательно:

$$F = \frac{m\,\omega^2 r^2}{p}. \tag{3}$$

По второму закону Кеплера секторная скорость планеты постоянна, то есть $\omega r^2 = C$. Откуда $\omega = \frac{C}{r^2}$ и из (3):

$$F = \frac{mC^2}{pr^2}. \tag{4}$$

Так как $C = \frac{2\pi ab}{T}$, а $p = \frac{b^2}{a}$, то $\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$.

Согласно третьему закону Кеплера $\frac{a^3}{T^2} = \text{const}$ для всех планет. Поэтому и $\frac{C^2}{p} = \mu = \text{const}$ для всех планет. Тогда $F = \mu\frac{m}{r^2}$.

По третьему закону Ньютона к Солнцу со стороны планеты также приложена сила $F = \lambda\frac{M}{r^2} = \mu\frac{m}{r^2}$, откуда $\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f = \text{const}$, вследствие постоянства μ и массы Солнца M. Тогда $\mu = fM$ и

$$F = f\frac{mM}{r^2}. \tag{5}$$

Так как использованное выражение (2), определяющее радиус кривизны эллипса, идентично с формулами, определяющими радиусы кривизны других конических сечений, то закон изменения силы взаимодействия (5) допускает также движение небесных тел по окружностям, параболам и гиперболам.

Сумский педагогический институт

Поступило в редакцию
12 мая 1965 г.